# Potencias de base racional y exponente entero

**Objetivos**

- Comprender las potencias cuya base es un número racional y el exponente un número entero.
- Reconocer el significado del exponente 0 y de los exponentes enteros negativos.

El **triángulo de Sierpinski** es una estructura que se genera por un proceso recursivo a partir de un triángulo del cual se extraen triángulos de menor tamaño. La secuencia de la construcción es la siguiente:

**1°** La figura original es un triángulo (Figura 0).

**2°** La figura siguiente se genera dibujando triángulos con vértices en los puntos medios de los lados y extrayendo el triángulo central.

**3°** Se repite este proceso en cada triángulo no extraído.

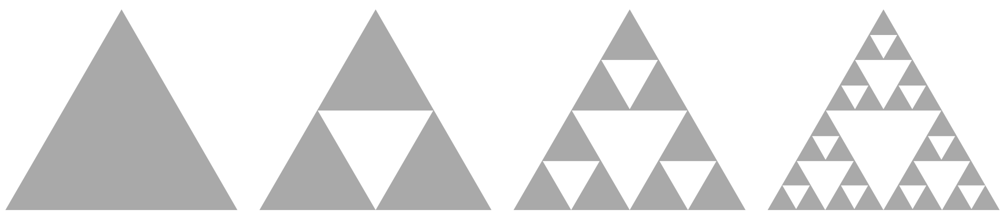

Figura 0 Figura 1 Figura 2 Figura 3

**Actitud**

Cuando trabajes en grupo, es muy importante que lleves a cabo las actividades aun cuando no te supervisen.

Trabaja y comenta las siguientes preguntas con tus compañeros, considerando que el triángulo usado anteriormente es equilátero.

- Si la medida de los lados del triángulo inicial es 1 cm, ¿cuánto miden los lados de los triángulos más pequeños de las figuras 1, 2 y 3?

______________________________

______________________________

- Escriban los resultados anteriores usando potencias.

______________________________

______________________________

- ¿Cuántos triángulos sin extraer tienen las figuras 1, 2 y 3? Usen potencias para escribir cada resultado.

______________________________

______________________________

______________________________

## Habilidad

El uso de expresiones matemáticas para describir situaciones y generalizarlas se relaciona con la habilidad de **modelar**.

- ¿Cuántos triángulos de color tendrá la figura 4? Usen potencias para escribir el resultado.

______________________________

______________________________

- En la actividad anterior pudiste notar que las medidas de los lados de los triángulos se podían escribir como multiplicación iterada. Este resultado motiva el uso de **potencias con base racional** (que puede ser fraccionaria o decimal).

**Conceptos**

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, la **potencia** de base $\frac{a}{b}$ y exponente $n$, con $n \in \mathbb{N}$, se define como:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n\text{ - veces}}$$

Como un número racional se puede representar como el cociente de dos números enteros, en el caso de una **potencia de base racional**, se tiene que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo 1

**Calcula el valor de las potencias $0{,}5^3$, $\left(-\frac{4}{3}\right)^3$, $\left(-\frac{5}{2}\right)^4$.**

- $0{,}5^3 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5$ ⇢ Desarrollas la potencia.
  $= 0{,}25 \cdot 0{,}5$ ⇢ Multiplicas sucesivamente los números decimales.
  $= 0{,}125$

  Otra manera de calcular el valor de la potencia es expresando los números decimales en su forma fraccionaria:

  $$0{,}5^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

- $\left(-\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{-4}{3} \cdot \frac{-4}{3} \cdot \frac{-4}{3}$ ⇢ Desarrollas la potencia.
  $= \frac{16}{9} \cdot \frac{-4}{3}$ ⇢ Aplicas la propiedad del producto de fracciones respetando la regla de los signos.
  $= \frac{-64}{27}$

- $\left(-\frac{5}{2}\right)^4 = \left(\frac{-5}{2}\right) \cdot \left(\frac{-5}{2}\right) \cdot \left(\frac{-5}{2}\right) \cdot \left(\frac{-5}{2}\right)$ ⇢ Desarrollas la potencia.
  $= \frac{25}{4} \cdot \frac{25}{4}$ ⇢ Aplicas la propiedad del producto de fracciones respetando la regla de los signos.
  $= \frac{625}{16}$

› ¿Qué propiedad de las potencias de base entera negativa se podría haber aplicado en las últimas dos potencias del ejemplo 1?

› En el **triángulo de Sierpinski**, ¿qué medidas se podrían escribir como potencias de base fraccionaria y exponente natural? Comenta con un compañero o una compañera.

**Waclaw Sierpinski**
1882 -1969

Fue un matemático polaco que, entre sus aportes, estudió la teoría de la curva que describe un camino cerrado que contiene todos los puntos interiores de un cuadrado.

## Atención

Recuerda que:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

con $a$, $b$ números enteros distintos de cero.

## Conceptos

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

Ejemplo 2

**¿Cuál es el valor de $0,\overline{3}^{-3}$? Justifica tu respuesta aplicando propiedades de potencias de base entera y exponente entero.**

Usando directamente la propiedad, se tiene: $0,\overline{3}^{-3} = \left(\frac{3}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{3}\right)^{3} = 3^3 = 27$.

Aplicando las propiedades de las potencias de base entera:

$0,\overline{3}^{-3} = \left(\frac{3}{9}\right)^{-3}$ → Expresas el número decimal periódico en fracción.

$= \frac{3^{-3}}{9^{-3}}$ → Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= 3^{-3} : 9^{-3}$ → Escribes como una división.

$= \frac{1}{3^3} : \frac{1}{9^3}$ → Aplicas la propiedad de la potencia con exponente negativo y base entera.

$= \frac{9^3}{3^3}$ → Calculas la división de fracciones.

$= \left(\frac{9}{3}\right)^{3}$ → Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= 3^3 = 27$

**Respuesta:** El valor de $0,\overline{3}^{-3}$ es 27.

## Atención

Recuerda que para expresar un número decimal periódico en su forma fraccionaria, en el denominador se deben poner tantos nueves como cifras tenga el período, y en el numerador, el número con el período, sin considerar la coma decimal, menos el número formado por la parte entera. Luego, si es el caso, simplificas.

Por ejemplo:

$$0,\overline{3} = \frac{3-0}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$1,\overline{21} = \frac{121-1}{99} = \frac{120}{99} = \frac{40}{33}$$

Para representar números decimales como una fracción, ¿qué otro procedimiento utilizarías?

## Conceptos

Una **potencia de base un número racional distinto de cero con exponente 0** es igual a 1.

Simbólicamente: Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^{0} = 1$.

Ejemplo 3

**¿Cuál es el valor de $\left(-\frac{2}{7}\right)^{0}$? Justifica tu respuesta aplicando propiedades de potencias que tienen como base entera y exponente un número entero.**

Usando directamente la propiedad, se tiene que: $\left(-\frac{2}{7}\right)^{0} = 1$.

Otra manera es usar las propiedades de las potencias de base entera:

$\left(-\frac{2}{7}\right)^{0} = \frac{(-2)^0}{7^0}$ → Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= \frac{1}{1} = 1$ → Aplicas la propiedad de la potencia de exponente 0 y base entera.

**Respuesta:** El valor de $\left(-\frac{2}{7}\right)^{0}$ es 1.

**Conceptos**

La propiedad de la **potencia de una potencia** establece que:

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$ y $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$$

Ejemplo 4

**Explica por qué $(0,\overline{2}^{-3})^2 = 0,\overline{2}^{-6}$ y luego calcula su valor.**

La propiedad se obtiene al multiplicar en forma reiterada cada potencia:

$(0,\overline{2}^{-3})^2 = 0,\overline{2}^{-3} \cdot 0,\overline{2}^{-3}$ → Desarrollas el exponente cuadrado.

$= \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right)^3$ → Aplicas la propiedad de la potencia de exponente negativo.

$= \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right)$ → Desarrollas cada cubo.

$= \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right)^6$ → Escribes el producto como potencia.

$= 0,\overline{2}^{-6}$ → Aplicas la propiedad de la potencia de exponente negativo.

Para calcular el valor podemos, seguir estos pasos:

$(0,\overline{2}^{-3})^2 = 0,\overline{2}^{-3 \cdot 2} = 0,\overline{2}^{-6}$ → Aplicas la propiedad de la potencia de una potencia.

$= \left(\frac{2}{9}\right)^{-6}$ → Expresas el número decimal como una fracción.

$= \left(\frac{9}{2}\right)^{6}$ → Aplicas la propiedad de la potencia con exponente negativo.

$= \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2}$ → Desarrollas la potencia.

$= \frac{531\,441}{64}$ → Calculas el valor de la potencia.

- ¿Por qué crees que, para calcular el valor, se expresó el número decimal periódico en su forma fraccionaria? Explica.
- ¿Siempre se cumple que $[(a^n)^m]^k = a^{n \cdot m \cdot k}$?, ¿qué condiciones deben cumplir $a$, $m$, $n$ y $k$? Justifica tu respuesta y da un ejemplo.

## Atención

Generalmente: $(a^n)^m \neq a^{n^m}$

Por ejemplo,

$$(2^3)^2 \neq 2^{3^2}$$

$$2^6 \neq 2^9$$

¿En qué casos crees que se cumple la igualdad?